

MATRICES

Exercice n°1.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 11 \\ 22 & 17 & 0,1 & 8 \end{pmatrix}$.

- 1) Donner le format de A
- 2) Donner la valeur de chacun des éléments a_{14} , a_{23} , a_{33} et a_{32}
- 3) Ecrire la matrice transposée A' de A et donner son format

Exercice n°2.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & \dots & 7 \\ \dots & 9 & \dots \\ 8 & \dots & 0 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- 1) Compléter l'écriture de A de format 4×3 avec : $a_{32} = 5$, $a_{23} = -4$, $a_{21} = 8$ et $a_{12} = 11$
- 2) Ecrire la matrice transposée A' de A et donner son format

Exercice n°3.

- 1) Donner une matrice dont la transposée est égale à son opposée.
- 2) Donnez la matrice A telle que pour tout indice i et j avec, $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$, le terme a_{ij} soit donné par la formule $a_{ij} = 2i - j$

Exercice n°4.

On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculez $A + B$, $A - B$, $3A$, $4B$, $3A - 4B$

Exercice n°5.

On donne $A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} y & 7 \\ -1 & 3y \end{pmatrix}$.

- 1) Trouver x et y pour que $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}$
- 2) Trouver x et y pour que $2A - 4B = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}$

Exercice n°6.

On considère les matrices A , B et C définies par $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -14 & 7 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}$

Trouver deux réels x et y tels que $xA + yB = C$.

Exercice n°7.

Effectuer les produits suivants lorsque c'est possible. Lorsque c'est impossible, dire pourquoi.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice n°8.

Calculer, puis comparer les produits $A \times B$ et $B \times A$

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice n°9.

Dans chacun des cas, calculer les produits $A \times B$ et $B \times A$. Quelle particularité présente-t-il ?

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice n°10.

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ où x est un réel.

Déterminer x pour que $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$

Exercice n°11.

Calculez et comparez $A^2 + 2AB + B^2$ et $(A+B)^2$ avec : $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice n°12.

Soit les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On se propose de rechercher s'il existe une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $A \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2$.

1) Traduire cette égalité par un système de quatre équations à quatre inconnues

2) Résoudre ce système

3) Pour les valeurs trouvées a, b, c , et d , on pose $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Vérifier que $A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I_2$

Exercice n°13.

Définir pour chaque système la matrice A et le vecteur colonne C tels que le système donné soit équivalent à l'égalité matricielle $A \times X = C$

1) $\begin{cases} -5x + 3y = 2 \\ -x + y = 5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2,23x - 5,5y = 12 \\ 0,2x + y = 7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 7 \\ 5x + y - z = 8 \\ -x + 3y + 7z = -22 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x - y = 15 \\ y + 7z = 12 \\ x + y = 25 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + y + z = -5 \\ -y + z = 2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x + 6y = x + z + 31 \\ 7y + 2z = x - y + 27 \end{cases}$

Exercice n°14.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

1) A l'aide de la calculatrice, donner la matrice inverse A^{-1} (mettre les coefficients sous forme fractionnaire)

2) En déduire la résolution des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 3x - 10y = 4 \\ -2x + 8y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 10y = 1,5 \\ -2x + 8y = -0,4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 10y = 15 \\ -2x + 8y = -5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 10y = 1,25 \\ -2x + 8y = 0,5 \end{cases}$

Exercice n°15.

1) On considère le système $\begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + y + 3z = b \\ x - y + 2z = c \end{cases}$ où x, y, z, a, b et c sont des nombres réels.

Exprimer les nombres réels x, y et z en fonction de a, b et c

2) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que la matrice A est inversible et donner l'expression de A^{-1}

Exercice n°16.

On suppose que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des réels tels que $ad - bc \neq 0$

1) Trouver en fonction de a, b, c et d les réels x, y, t et t tels que : $A \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Vérifier que A admet pour matrice inverse : $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$